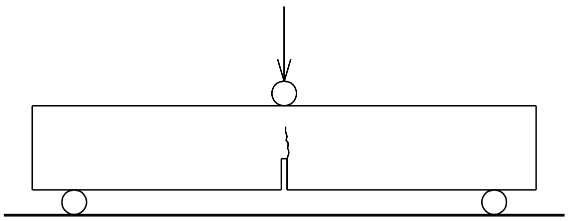
MODEL FOR HIGH PRECISION APPROXIMATION OF LOAD–DEFLECTION DIAGRAMS

M. Štafa, P. Frantík [1]

Summary: *The paper is focused on definition and application of the simple bending fracture model suitable for precision approximation of measured load–deflection diagrams from fracture three-point-bending tests.*

1. Úvod

Pro analýzu lomových zkoušek cementových kompozitů, prováděných tzv. tříbodovým ohybem trámce se zářezem v oblasti tahového namáhání, viz obr. 1, byl vyvinut jednoduchý model lomu při ohybu s jedním stupněm volnosti (Frantík (2004)).



Obrázek 1: Tříbodový ohyb trámce se zářezem.

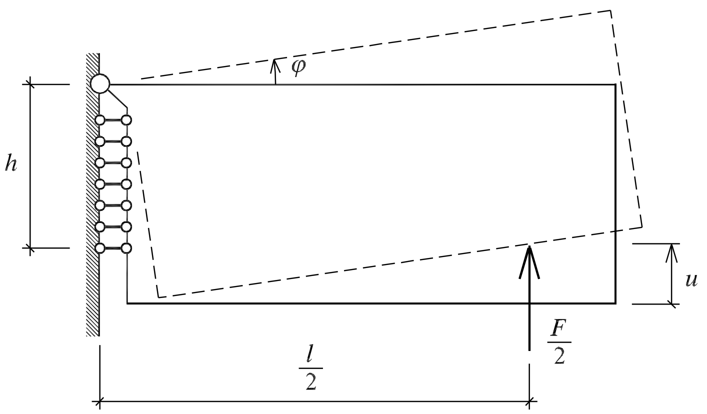
Lze jej použít například pro:

- přesné výpočty různých parametrů testovaného vzorku (počáteční tuhost vzorku resp. modul pružnosti, přetvárnou práci resp. lomovou energii),
- korekce neúplných nebo nepřesných měření, odstranění šumu,
- primitivní výukovou reprezentaci ohybu a ohybového porušení, vysvětlení souvislostí mezi parametry různých modelů lomu a jejich chováním,
- analýzu kompozitních materiálů, jednoduché predikce vlivu změny jejich vlastností,
- pokročilou aproximaci naměřených dat, je-li potřeba získat spojitou aproximační funkci,
- provádění dynamických simulací lomových zkoušek, např. pro odhalení příčiny problémů při experimentálním měření,
- odhalení nehomogenity průřezu, její vliv na tvar zatěžovacího diagramu.

[1] Ing. Michal Štafa, Ing. Petr Frantík, Ph.D., Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 331/95, 602 00 Brno, e-mail: stafa@centrum.cz, kitnarf@centrum.cz

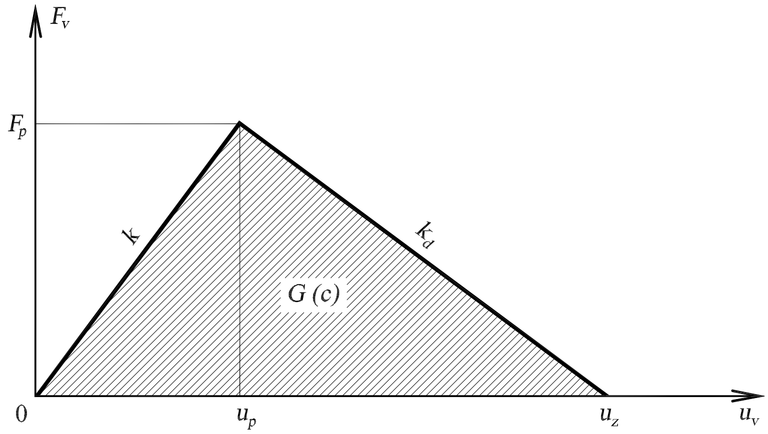
2. Model

Z výpočetního hlediska je úloha lomu při tříbodovém ohybu trámce se zářezem dostatečně složitá na to, aby se za určitých okolností uplatnil zjednodušený model. Těmito okolnostmi jsou například dynamické simulace, identifikace parametrů modelu, parametrické studie, apod. Zjednodušení úlohy je značné: trámec je rozdělen rovinou symetrie na dvě absolutně tuhé desky, vzájemně spojené kloubem a skupinou vláken, viz obr. 2. Díky takto značnému zjednodušení, lze například zatěžovací diagram získat velmi rychle a tak efektivně provádět výpočty, které jsou náročné v jiném smyslu.



Obrázek 2: Model lomu při ohybu.

Model je dán následujícími parametry: výškou oslabeného průřezu h, šířkou oslabeného průřezu w, rozpětím l a množinou skupin vláken, jejichž uspořádání bude detailně popsáno dále. Každé vlákno, působící ve vzdálenosti r od kloubu, je definováno bilineární funkcí, viz obr. 3.



Obrázek 3: Napjatostní funkce vlákna.

Tato funkce je určena parametry: tuhostí k, mezní silou F_p a koeficientem přetvárné práce c. Z této trojice parametrů lze výpočtem stanovit: tuhost sestupné větve k_d, kritické protažení u_p, protažení při přetržení vlákna u_z a práci nutnou k přetržení vlákna G s pomocí následujících výrazů:

$$k_d = -\frac{k}{c-1}\,, \tag{1}$$

$$u_p = \frac{F_p}{k}, \tag{2}$$

$$u_z = u_p - \frac{F_p}{k_d}, \tag{3}$$

$$G = c \cdot \frac{F_p}{2u_p}. \tag{4}$$

Pro sílu F_v, kterou vlákno působí na tuhou desku platí:

$$F_v(u_v) = \begin{cases} k\,u_v, & u_v \in \langle\, 0\,;\, u_p \,\rangle, \\ k_d(u_v - u_z), & u_v \in (\, u_p\,;\, u_z\,)\,, \\ 0. & \end{cases} \tag{5}$$

kde u_v, je protažení vlákna, pro které lze psát:

$$u_v = u\frac{2r}{l}, \tag{6}$$

kde u, je průhyb trámce. Pro výslednou sílu F, kterou je trámec uprostřed rozpětí zatěžován, pak platí výraz:

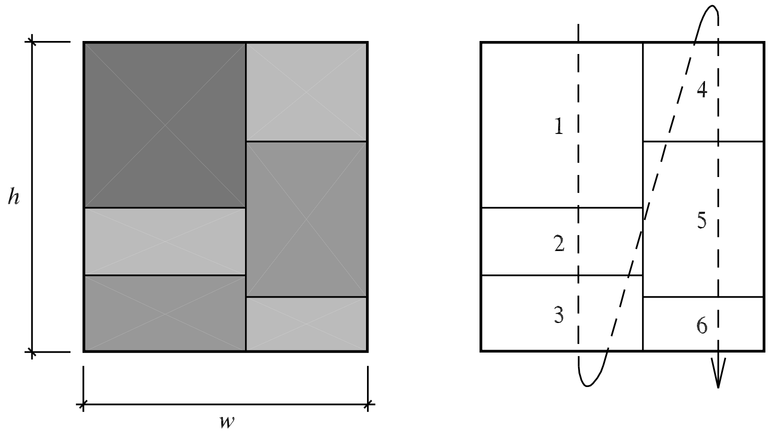
$$F(u) = \frac{2}{l}\sum_{i=1}^{n} r_i\,F_{vi}\,(u_{vi})\,, \tag{7}$$

kde i je index vlákna a n je počet vláken.

V modelu se vlákna nedefinují jednotlivě, ale v rámci skupin. Skupinu vláken lze chápat jako část oslabeného průřezu trámce, která se vnitřně převádí na ekvidistantně rozmístěná vlákna po její ploše. V rámci skupiny mají všechna vlákna stejné vlastnosti, vzájemně se lišící pouze polohou. Počet vláken ve skupině je nastaven implicitně v závislosti na velikosti skupiny. V případě požadavku větší hladkosti diagramu resp. rychlejšího výpočtu lze počet vláken ve skupině změnit.

Skupiny vláken jsou vytvářeny specifickým způsobem tak, aby bez překryvů a otvorů vyplnily celý oslabený průřez trámce (otvor v průřezu lze modelovat skupinou s vhodnými vlastnostmi). Každá skupina má tvar obdélníka se stranami rovnoběžnými s okraji oslabeného průřezu. Skupiny jsou po průřezu rozmístěny ve sloupcích, přičemž každý sloupec může mít jiný počet skupin.

Takto navržené uspořádání umožňuje širokou variabilitu současně s nízkým počtem geometrických parametrů. Při vhodně zvolených parametrech dokonce není třeba kontrolovat geometrické poruchy (překryvy skupin a otvory). Tento fakt má velký význam u genetické reprezentace modelu, viz dále. Skupiny jsou řazeny v posloupnosti, tj. každá skupina má svůj index a díky tomu i danou polohu vhledem k ostatním skupinám, viz obr. 4.



Obrázek 4: Uspořádání skupin po oslabeném průřezu.

Kromě indexu má každá skupina následující parametry: velikost s, modul pružnosti E, tahovou pevnost f, coeficient přetvárné práce c a značku ukončení sloupce t. Pomocí těchto parametrů se vypočítají parametry jednotlivých vláken, včetně jejich polohy, v závislosti na počtu vláken ve skupině.

Relativní rozměry dané skupiny v rámci průřezu trámce se odvíjejí od jejího parametru s a od parametru velikosti sloupce S_c, který se stanoví ze vztahu:

$$S_c = \sum_{j=i_f}^{i_l} s_j, \tag{8}$$

kde i_f je index první skupiny ve sloupci a i_l je index poslední skupiny ve sloupci. Absolutní rozměry skupiny jsou pak dány výrazy:

$$w_s = w \frac{S_c}{\sum_{j=1}^{n_g} s_j}, \tag{9}$$

$$h_s = h \frac{s}{S_c}, \tag{10}$$

kde w_s je šířka skupiny, h_s je výška skupiny a n_g je celkový počet skupin v průřezu. Doplňme, že vzdálenost r_s horní hrany skupiny od kloubu je dána součtem výšek předcházejících skupin ve sloupci.

Výše již bylo zmíněno, že vlákna jsou ve skupině rozmístěna ekvidistantně. Za tohoto předpokladu pro polohu r_i vlákna i platí:

$$r_i = r_s + h_s \frac{2i-1}{2n_v}, \tag{11}$$

kde n_v je počet vláken ve skupině. Pro zbývající fyzikální parametry vlákna platí:

$$k = \frac{2EA}{ln_v}, \tag{12}$$

$$F_p = \frac{Af}{n_v}, \tag{13}$$

kde A je plocha skupiny. Koeficient přetvárné práce c je pro vlákno a skupinu shodný.

3. Genetická reprezentace

Aproximaci naměřeného zatěžovacího diagramu lze provést pomocí genetického algoritmu. Model je v genetickém algoritmu reprezentován řetězcem čísel ve formátu tzv. Grayova kódu, viz Wikipedie (2010). Tento řetězec definuje uspořádání skupin vláken a jejich vlastnosti, viz tab. 1. Z tohoto řetězce lze pomocí výše popsaných výrazů sestavit model se skupinami vláken.

index	1					2					...	n_g				
řetězec	s_1	E_1	f_1	c_1	t_1	s_2	E_2	f_2	c_2	t_2	...	s_{ng}	E_{ng}	f_{ng}	c_{ng}	t_{ng}

Tabulka 1: Řetězec reprezentující model pro genetický algoritmus.

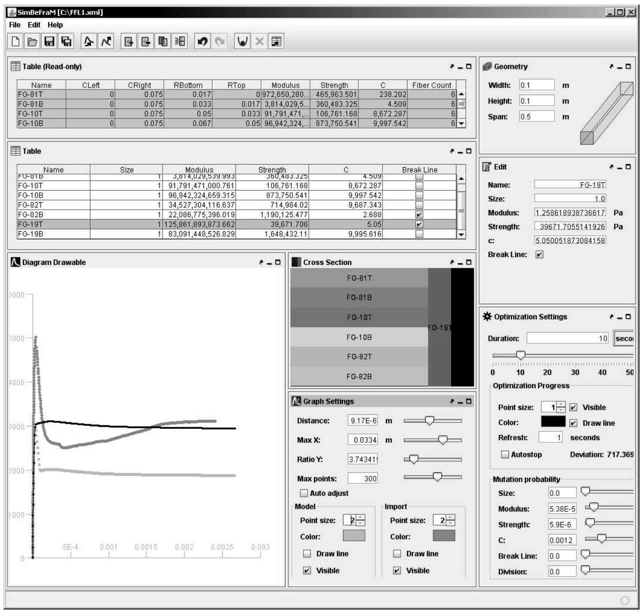
Pro správnou funkci genetického algoritmu je potřeba určit počáteční model a nastavit pravděpodobnosti prohození bitů čísel v tomto řetězci. Jelikož se jedná o nelineární problém, lze optimální řešení nalézt mnoha způsoby, přičemž není snadné určit, který způsob bude úspěšný a jak rychle bude optimum nalezeno.

Poznamenejme, že vývoj optimalizace je ovlivněn rovněž vnitřním nastavením genetického algoritmu: velikostí populace, pravděpodobností přežití zdatnějšího, apod. Je zde také významné omezení v rozsahu reprezentace čísel, které se nacházejí v řetězci. Z tohoto důvodu je nalezené řešení závislé rovněž na použitých jednotkách.

4. Implementace

Pro praktické nasazení modelu byla naprogramována aplikace, která díky svému grafickému rozhraní zajišťuje jeho plné vyžití a to s co možná největší uživatelskou přívětivostí, viz obr. 5. Aplikace byla vytvořena v jazyce Java, což umožňuje její použití na všech běžně dostupných platformách a dostala název ***SimBeFraM***. Tento výraz vznikl jako akronym z anglického ***Sim****ple* ***Be****nding* ***Fra****cture* ***M****odel*. Aktuální verze je dostupná na webových stránkách: *http://simbefram.kitnarf.cz* a je distribuována pod licencí GNU GPL.

Práce s aplikací je velice intuitivní a po načtení dat ze zatěžovací zkoušky a nastavení geometrie modelu je možné ihned spustit optimalizační proces. Samozřejmostí programu je práce s rozložením a vlastnostmi skupin, stejně jako výpis základních lomových parametrů. Díky relativně malé výpočetní náročnosti je možné vývoj optimalizace sledovat v reálném čase. Jelikož se při použití genetického algoritmu uplatňuje silná náhodná složka, je uživateli dána možnost řídit pravděpodobnost změny jednotlivých hledaných parametrů, a to i během samotného výpočtu. Výslednou aproximační funkci je možno několika způsoby exportovat například s využitím trasovací transformace, viz Frantík a kol. (2008).



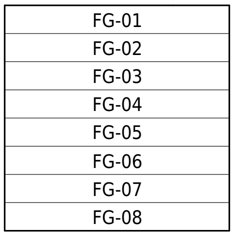
Obrázek 5: Pracovní prostředí aplikace SimBeFraM.

5. Výsledky

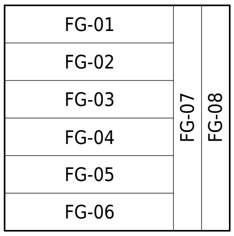
Bylo aproximováno několik diagramů získaných z experimentálních zatěžovacích zkoušek. Materiály vzorků je možné rozdělit do dvou kategorií, prostý beton a beton vyztužený vlákny. Zástupcem kategorie první, jsou vzorky zhotoveny z betonu pro výrobu pražců. Vzorky byly podrobeny zkoušce tříbodovým ohybem se zářezem a jejich diagramy jsou dále značeny **B2** až **B4**. Výsledky zkoušek již byly publikovány Ing. Václavem Veselým Ph.D. a bližší informace lze rovněž najít v článku Frantík a kol. (2005). Dalšími daty jsou diagramy betonových vzorků na lisu HECKERT FPZ 100/1 pořízeny Ing. Pavlem Schmidem, Ph.D. (FAST VUT v Brně), viz Frantík (2006). Tyto diagramy jsou značeny **LD1**, **LD2**.Do kategorie betonů s vlákny se řadí vzorky z drátkobetonu, značeny **DRL1**, **DRL2**, **DRL3**. Dalším pokročilým materiálem na podobné bázi je beton s vlákny *Forta Ferro* a vzorky z tohoto materiálu jsou značeny jako **FFL1, FFL2**. Data ze zkoušky drátkobetonu i betonu s vlákny FortaFerro jsou využity z experimentu doc. Vodičky z FSv ČVUT v Praze.

Aproximace byly na všech vzorcích provedeny třemi různými způsoby. Nejprve byla u všech vzorků provedena aproximace pouze pomocí jedné skupiny (1. aproximace). Následně byl průřez po výšce rozdělen na osm skupin, tak aby každá měla stejnou velikost (2.aproximace, obr. 6). Poslední aproximace byla provedena na osmi skupinách stejných velikostí, kdy šest z nich bylo nad sebou zatímco další dvě zabíraly celou výšku průřezu (3.aproximace, obr. 7). Pro jednotlivé typy rozdělení průřezu bylo vždy použito stejného počtu vláken. Pro skupinu rozlehlou po celé výšce to představovalo 40 vláken. U dílčích skupin vždy tak, aby jejich počet byl stejný a součet ve sloupci nepřesahoval 40. To znamená pět vláken ve skupině pro druhý typ a šest pro třetí typ aproximace.

Prezentované výsledky ve většině případů nejsou globálním extrémem optimalizované funkce. To vyplývá z velkého množství a rozsahu parametrů. Výpočet byl zpravidla ukončen pokud docházelo pouze k minimální změně průměrné odchylky, řádově desetiny až setiny promile. Potřebný čas byl především závislý na složitosti diagramu a množství jim obsažených bodů.



Obrázek 6: Rozdělení skupin 2. aproximace



Obrázek 7: Rozdělení skupin 3. aproximace

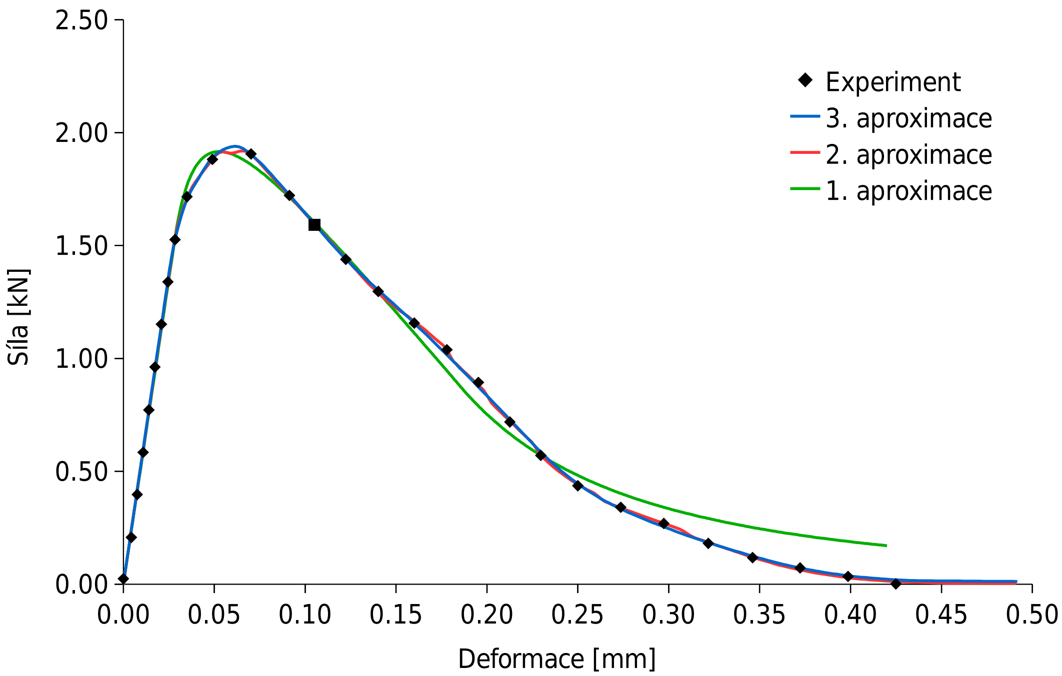
5.1. Vzorky B1 až B6

Při pohledu na uvedené obrázky 8 až 10 lze vidět, že aproximace vykazují velice dobrou shodu. To je možné zhodnotit i na základě hodnot průměrných odchylek jednotlivých aproximací, viz. tab. 2.

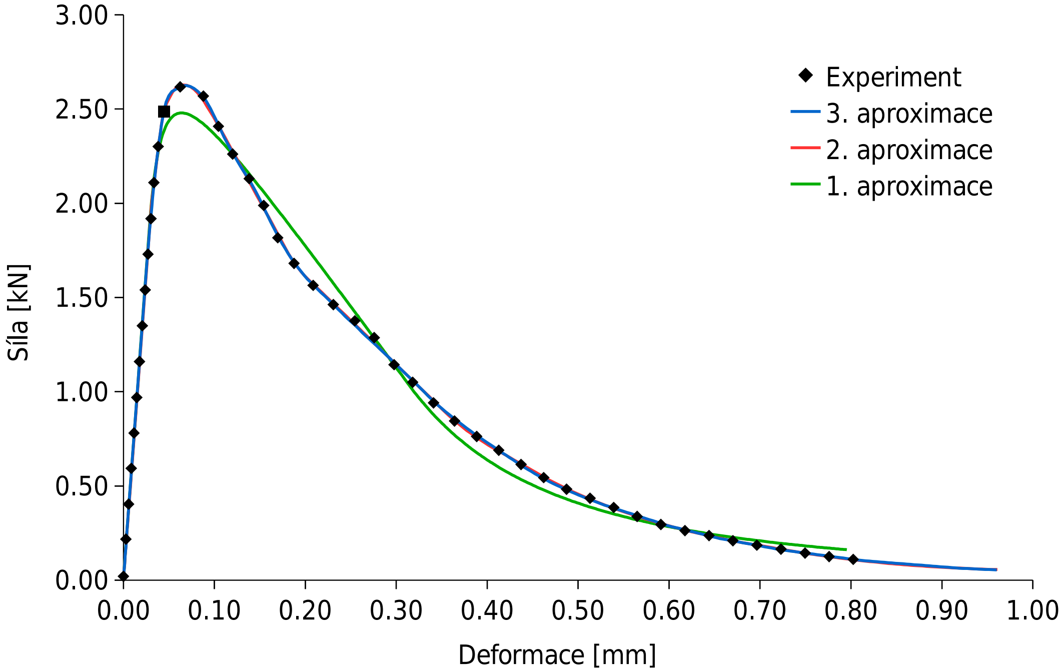
Vzorek	1. aprox.	2. aprox.	3. aprox.
B2	71.24	10.61	11.56
B3	67.23	15.67	13.83
B4	105.42	15.50	15.27

Pozn.: Hodnoty jsou uvedeny v newtonech.

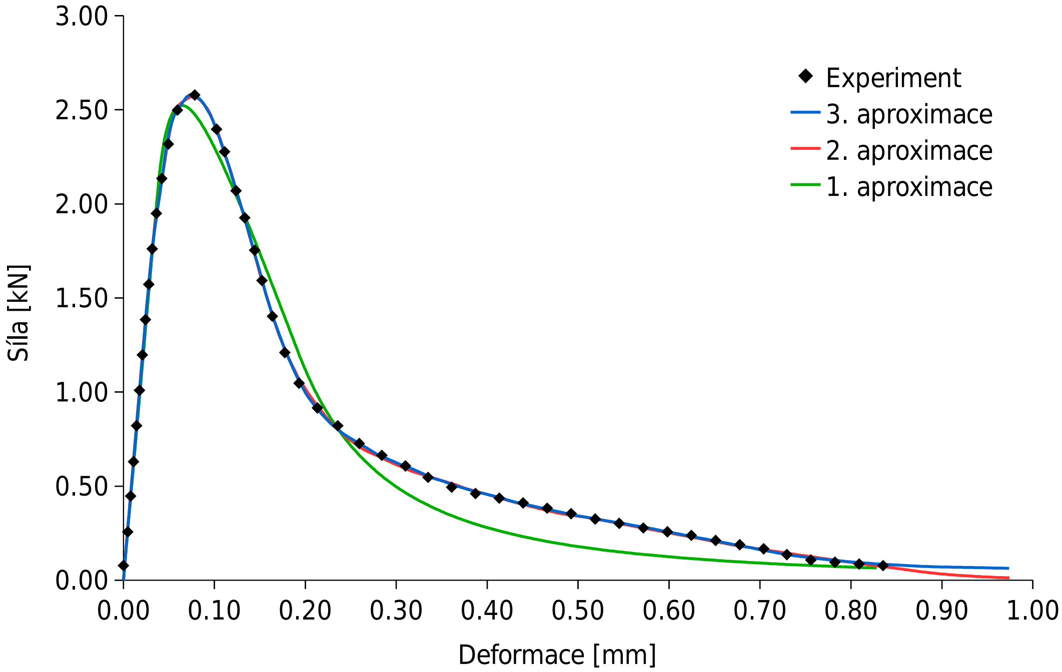
Tabulka 2: Průměrné odchylky u jednotlivých aproximací na vzorcích B2 až B4



Obrázek 8: Porovnání výsledků aproximace s experimentem u vzorku B2.



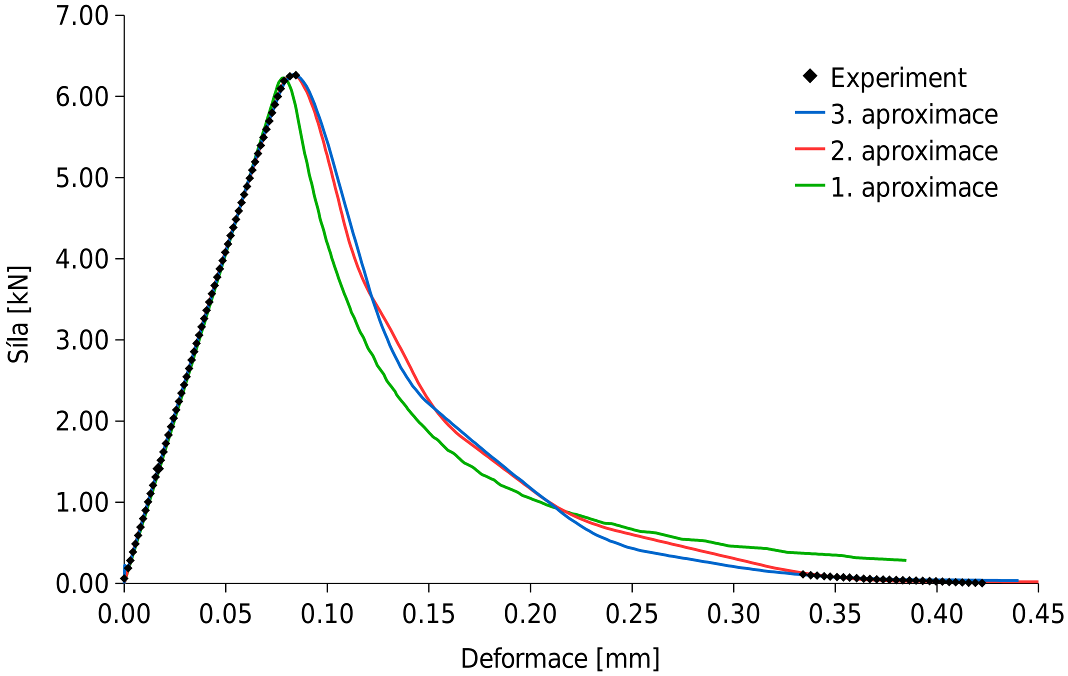
Obrázek 9: Porovnání výsledků aproximace s experimentem u vzorku B3.



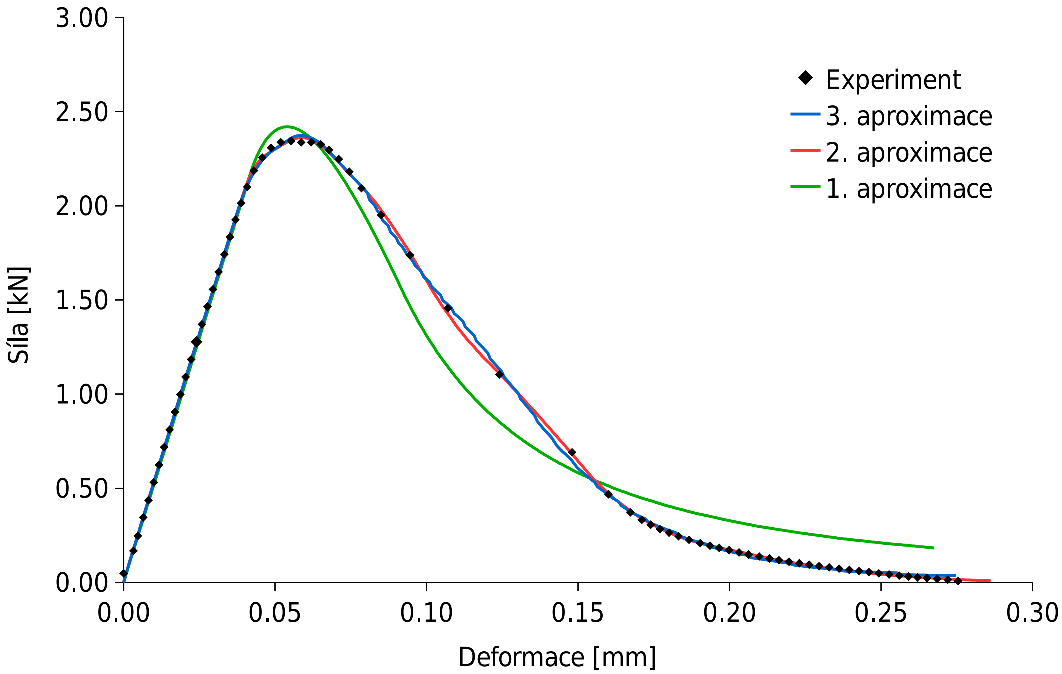
Obrázek 10: Porovnání výsledků aproximace s experimentem u vzorku B4.

5.2. Vzorky LD1 a LD2

Tyto vzorky demonstrují jak je model schopen vystihnout neúplný diagram. I přesto, že diagramy byly očištěny o špatně podmíněné body, lze na obrázcích 11 a 12 vidět, že výsledek dosažený algoritmem je velice působivý a je ho možné využít na takovouto opravu dat.



Obrázek 11: Porovnání výsledků aproximace s experimentem u vzorku LD1.



Obrázek 12: Porovnání výsledků aproximace s experimentem u vzorku LD2.

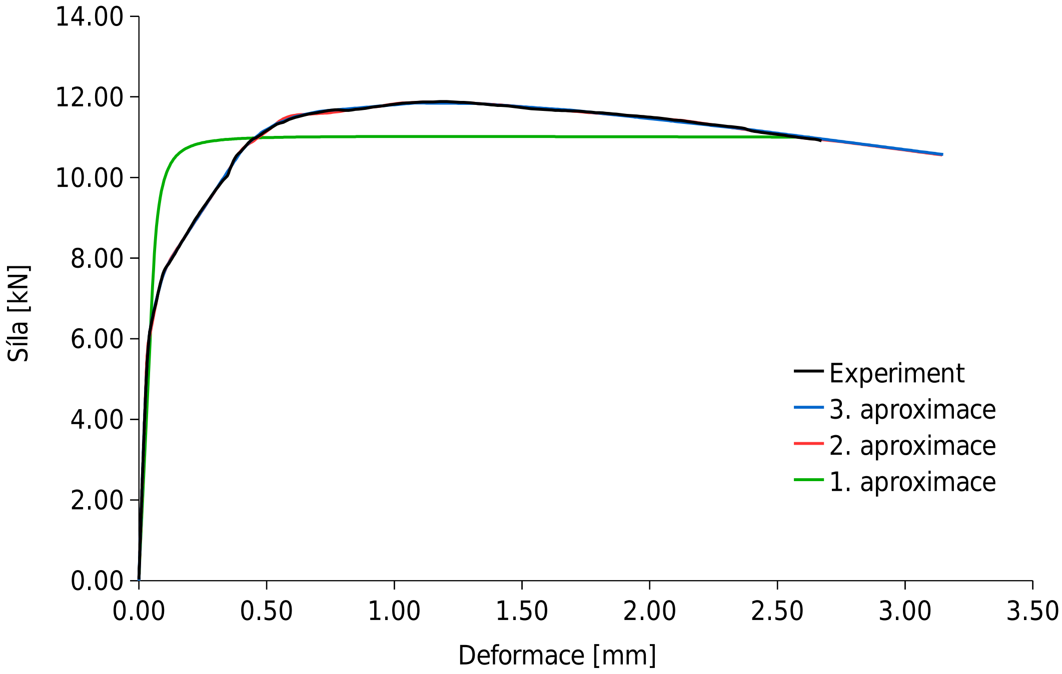
5.3. Vzorky DRL1 až DRL3

Dostáváme se ke skupině betonů s vlákny. Hlavně kvůli těmto materiálům byl použit přístup kombinující horizontální a vertikální skupiny vyskytující se u třetí aproximace. Jak je možné vidět v tabulce 3, byl tento přístup opodstatněný. Třetí aproximace při stejném počtu optimalizovaných parametrů celkově vykazuje lepší shodu. Ostatně to potvrzují i obrázky 13 až 15.

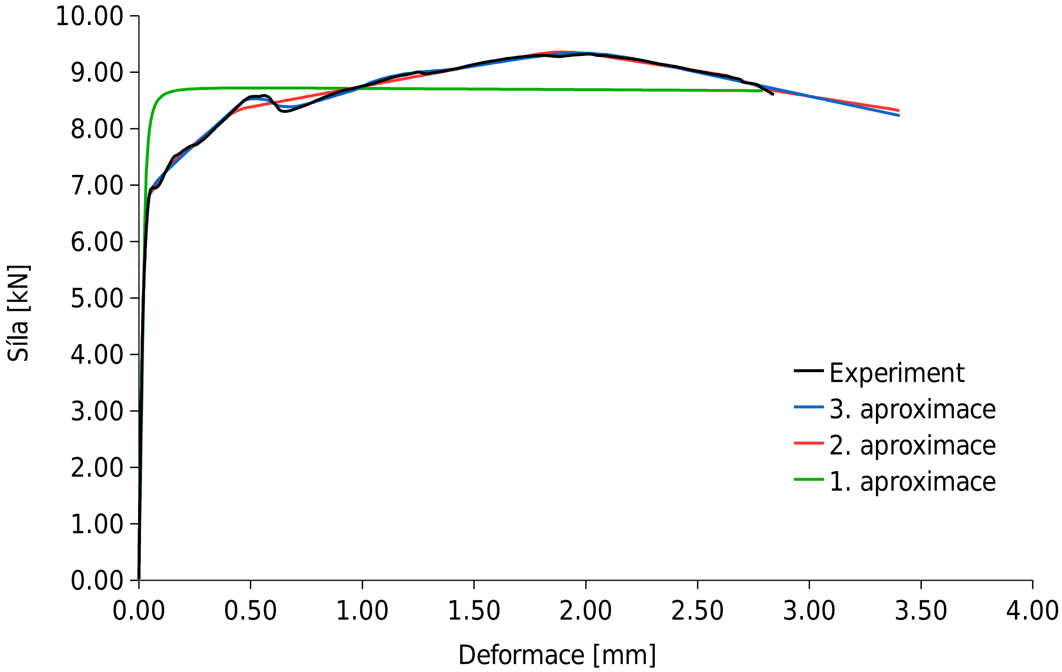
Vzorek	1. aprox.	2. aprox.	3. aprox.
DRL1	964.74	56.03	24.56
DRL2	559.65	56.49	35.91
DRL3	1340.84	87.62	57.56
FFL1	520.20	34.06	29.68
FFL2	539.41	32.31	27.17

Pozn.: Hodnoty jsou uvedeny v newtonech.

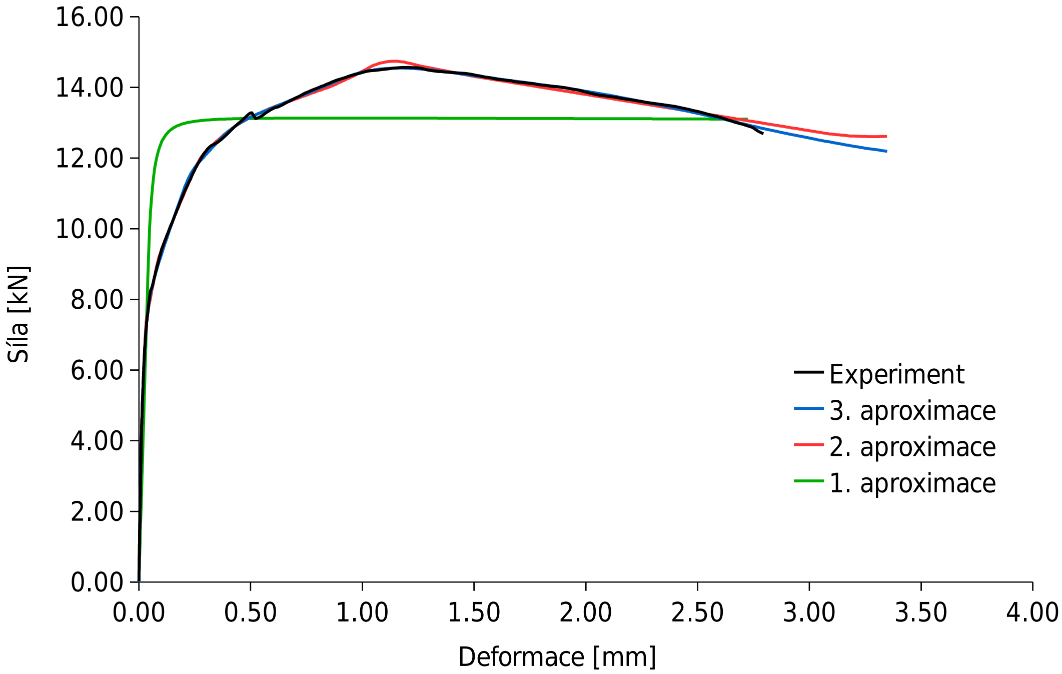
Tabulka 3: Odchylky u vláknobetonů



Obrázek 13: Porovnání výsledků aproximace s experimentem u vzorku DLR1.

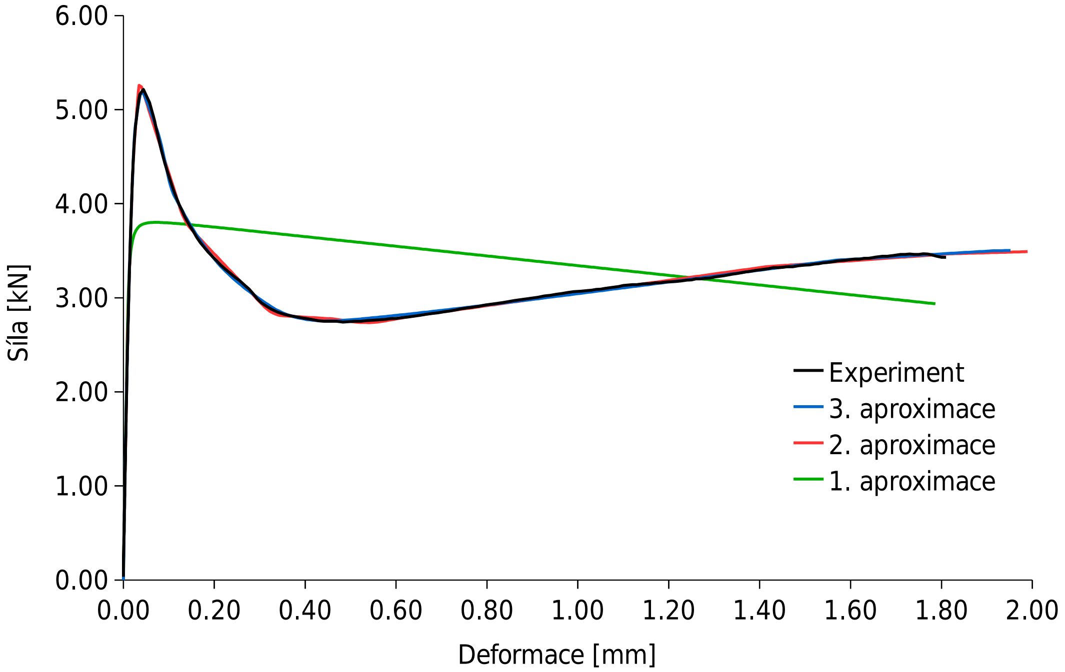


Obrázek 14: Porovnání výsledků aproximace s experimentem u vzorku DLR2.

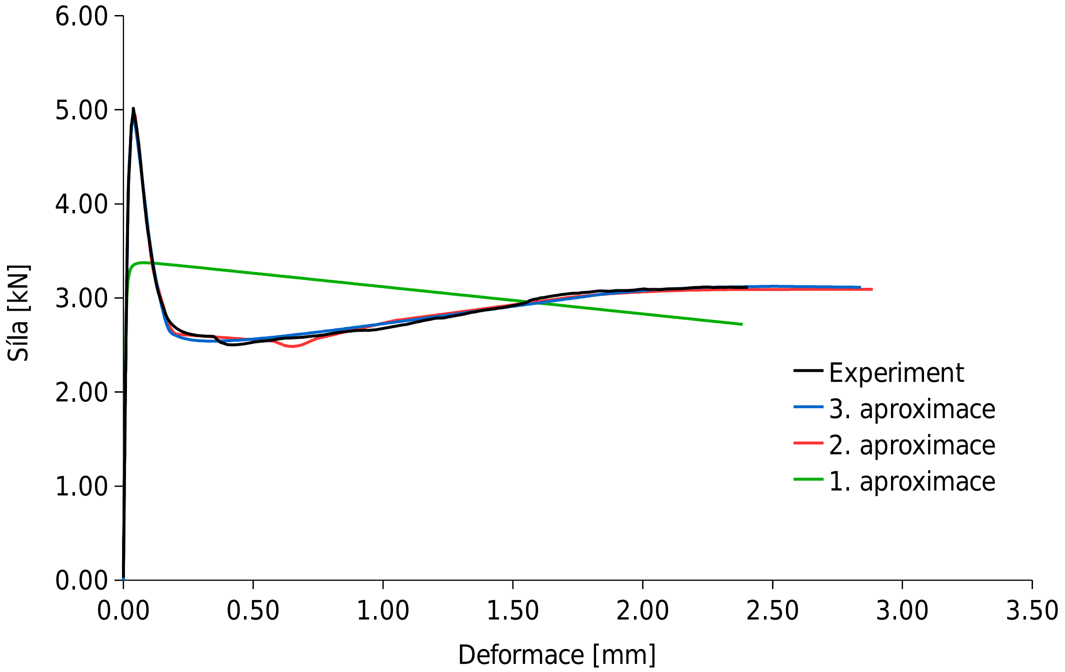


Obrázek 15: Porovnání výsledků aproximace s experimentem u vzorku DLR3.

5.4. Vzorky FFL1 a FFL2



Obrázek 16: Porovnání výsledků aproximace s experimentem u vzorku FFL1.



Obrázek 17: Porovnání výsledků aproximace s experimentem u vzorku FFL2.

Vzorky s vlákny Forta Ferro byly pro zpracování značně obtížné. Jak lze vidět z obrázků 16 a 17 mají složitou sestupnou větev diagramu. Navíc oblast největší deformace nemá jednoznačně klesající tuhost.

6. Závěr

Aby bylo možno zatěžovací diagramy efektivně nahrazovat byl v článku představen výpočetní model a popsány jeho parametry. Jelikož je k realizaci modelu zapotřebí využít sílu výpočetní techniky, na základě uvedených principů byla vyvinuta grafická aplikace SimBeFraM, která je v článku krátce představena. Aplikace bylo následně využito k aproximaci různých zatěžovacích diagramů, včetně vláknobetonů a diagramů s neúplnými daty. Na těchto diagramech bylo poukázáno na určitá specifika modelu, zejména na způsob rozdělení skupin. I přesto, nebo právě proto, že se jedná o silně nelineární úlohu genetické algoritmy ukázaly svůj přínos. Ve všech těchto případech, model projevil velice dobrou shodu s výsledky měření a tím prokázal, že jeho použití má skutečně praktický význam.

7. Poděkování

Tento výsledek byl získán za finančního přispění MŠMT, projekt 1M6840770001, v rámci činnosti výzkumného centra CIDEAS. Při řešení byly částečně využity teoretické výsledky dosažené v projektu GA ČR 103/08/0963.

8. References

Frantík, P. 2004: *Jednoduchý model lomu trámce*, sborník semináře Problémy lomové mechaniky IV, ÚFM AV ČR a STM FAST VUT v Brně, Brno 2004.

Wikipedia, the free encyclopedia: *Gray code*, http://en.wikipedia.org/.

Frantík, P., Keršner, Z., Řoutil, L.,Veselý, V. 2005: *Approximation of bending fracture model by load-deflection diagrams.* Inženýrská mechanika 2005, CD sborník, Svratka 2005.

Frantík, P. 2006: *Dynamická simulace lomového experimentu.* Problémy lomové mechaniky VI., sborník přednášek semináře, UFM AV ČR a STM FAST VUT v Brně, Brno 2006.

Frantík, P., Lehký, D., Keršner, Z. 2008: *Vyhodnocení lomových experimentů: Efektivní náhrady zatěžovacích diagramů.* konference 70 rokov SvF STU, Bratislava 2008.